Universidad Simón Bolívar
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas
Enero - Marzo 2014

Carné: ______________________

Nombre: ______________________

MA-1122 —Segundo Examen, Junio 2014. —

1. (14 pts) Halle el valor de la siguiente integral:

$$\int_0^1 \frac{2x^3}{(x^2+1)(x+1)}\, dx$$

2. (10 pts) Halle la longitud de un arco completo de la cicloide, parametrizado por $\sigma(t) = (t - \operatorname{sen}(t), 1 - \cos(t))$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Elija uno de los siguientes problemas y resuélvalo. Sólo se evaluará el problema indicado.

3. (16 pts) Determine si las siguientes integrales impropias son convergentes. En caso afirmativo, determine un valor de M que asegure que $\int_M^\infty f(x)dx < 0{,}01$

(a) $\displaystyle\int_3^\infty \frac{3x+\sqrt{x}}{x\log(x)}dx$ (b) $\displaystyle\int_{10}^\infty \frac{4x-2}{\sqrt{x^7-1}}dx$

4. (20 pts) →21 El siguiente problema considera una función muy importante en matemática:

5pts a) Pruebe que si u y v son funciones diferenciables en (a, ∞) que satisfacen:

$$\lim_{x\to\infty} u(x)v(x) = L \in \mathbb{R} \qquad \lim_{x\to a^+} u(x)v(x) = M \in \mathbb{R}$$

entonces se cumple la siguiente *regla de integración por partes para integrales impropias*:

$$\int_a^\infty u'(x)v(x)dx = (L - M) - \int_a^\infty v'(x)u(x)dx$$

6pts b) La función Gamma se define como

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt$$

Verifique que esta función está bien definida para todo $x > 0$.

5pts c) Utilice la regla de integración por partes para integrales impropias para demostrar que $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

5pts d) Verifique que $\Gamma(1) = 1$ y deduzca que, para cualquier número natural n, $\Gamma(n+1) = n!$.